Calcolo proposizionale

Teorema o tautologia

- Proposizione composta che è vera per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. *La prima legge di De Morgan*

not (A and B) = not A or not B

2 1 6 3 5 4

ordine di esecuzione

not	(A	and	B)	=	not	A	or	not	B
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Contraddizione

- Proposizione composta che è falsa per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. (A < B) = (A ≥ B)

1 3 2 ordine di esecuzione

(A	<	B)	=	(A	≥	B)
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F

REGOLE DI INFERENZA

Consideriamo 2 importanti tautologie:

$((P \Rightarrow Q) \text{ AND } P) \Rightarrow Q$

MODUS PONENS

$((P \Rightarrow Q) \text{ AND NOT } Q) \Rightarrow \text{NOT } P$

MODUS TOLLENS

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	P)	$\Rightarrow$	Q

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	P)	$\Rightarrow$	Q
V				V		
V				V		
F				F		
F				F		

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	P)	$\Rightarrow$	Q
V		V		V		V
V		F		V		F
F		V		F		V
F		F		F		F

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	P)	$\Rightarrow$	Q
V	V	V		V		V
V	F	F		V		F
F	V	V		F		V
F	V	F		F		F

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	P)	$\Rightarrow$	Q
V	V	V	V	V		V
V	F	F	F	V		F
F	V	V	F	F		V
F	V	F	F	F		F

Esercizi:
dimostrare le due tautologie

MODUS PONENS

((P	⇒	Q)	AND	P)	⇒	Q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F

TAUTOLOGIA

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	NOT Q)	$\Rightarrow$	NOT P

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	NOT Q)	$\Rightarrow$	NOT P
V						F
V						F
F						V
F						V

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	⇒	Q)	AND	NOT Q)	⇒	NOT P
V		V		F		F
V		F		V		F
F		V		F		V
F		F		V		V

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	NOT Q)	$\Rightarrow$	NOT P
V	V	V		F		F
V	F	F		V		F
F	V	V		F		V
F	V	F		V		V

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	NOT Q)	$\Rightarrow$	NOT P
V	V	V	F	F		F
V	F	F	F	V		F
F	V	V	F	F		V
F	V	F	V	V		V

Esercizi: dimostrare le due tautologie

MODUS TOLLENS

((P	$\Rightarrow$	Q)	AND	NOT Q)	$\Rightarrow$	NOT P
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V

TAUTOLOGIA

IL MODUS PONENS

Il significato della prima tautologia è il seguente:

- Se ogni volta che accade un certo evento P allora accade anche un certo evento Q (ossia P è causa di Q)
- E io so che un evento P è realmente accaduto
- Allora posso inferire (= dedurre) che è avvenuto anche l'evento Q

$$((P \Rightarrow Q) \text{ AND } P) \Rightarrow Q$$

IL MODUS TOLLENS

Il significato della seconda tautologia è il seguente:

- Se ogni volta che accade un certo evento P allora accade anche un certo evento Q (ossia P è causa di Q)
- E io so che l'evento Q non è accaduto
- Allora posso inferire (= dedurre) che non è avvenuto neppure l'evento P

$$((P \Rightarrow Q) \text{ AND NOT } Q) \Rightarrow \text{NOT } P$$

QUINDI ….

Alla base della **logica matematica** ci sono:

- Le regole di composizione di proposizioni elementari per la costruzione di proposizioni complesse
- Il calcolo dei valori di verità delle proposizioni complesse
- Un ruolo importante è svolto dalle **tautologie**, che sono sempre vere, e dalle **contraddizioni**, che sono sempre false

Teorie Ipotetico-Deduttive

In una teoria ipotetico-deduttiva sono date alcune proposizioni iniziali (**ASSIOMI**) dalle quali, attraverso le regole di inferenza, potranno essere DEDOTTE nuove proposizioni (**TEOREMI**) attraverso procedure di DIMOSTRAZIONE, che sono una applicazione del **MODUS PONENS** e del **MODUS TOLLENS**.

Ma non sempre le cose vanno come ci aspettiamo …

I Paradossi

Un paradosso è una proposizione P tale che

- Se P è vera, allora P è falsa
- Se P è falsa, allora P è vera
- Ossia P è vera se e solo se P è falsa!

Esaminiamo dei paradossi famosi e un paradosso divertente

Epimenide di Creta afferma: “Tutti i cretesi mentono”

- Se Epimenide, che è cretese, dice il vero, allora sta mentendo
- Se Epimenide sta mentendo, allora dice il vero

Più semplicemente potrei dire:

“IO STO MENTENDO”

•Se dico il vero, allora sto mentendo, ma

•Se sto mentendo, allora ciò che dico è falso e dunque non sto mentendo, ossia dico il vero.

Il paradosso del Barbiere

Bertrand Russell

Un generale ordina al barbiere della caserma (che è un soldato) di radere tutti e soli i soldati che non si radono da sé.

Il barbiere deve radersi o no?

Se si rade, allora non deve radersi.

Ma se non si rade, allora deve radersi …

Il Ponte dei Bugiardi

Pierino è un bugiardo.

Un giorno suo padre, stanco delle bugie, lo conduce davanti a un ponte e gli dice: “Questo è il ponte dei bugiardi, se un mentitore lo attraversa, crolla!”

Pierino, spaventato, giura di non dire più bugie, e torna a casa.

Il padre attraversa il ponte, e il ponte crolla.

Infatti il padre è un mentitore:

IL PONTE DEI BUGIARDI NON ESISTE!

Il paradosso dell’avvocato

In Academica (II, 95) Cicerone (106-43 a.C.) racconta il seguente caso, attribuito agli stoici.

Il filosofo Protagora accettò di avere come studente di legge un ragazzo che non poteva permettersi di pagarlo subito, con la clausola che egli l'avrebbe pagato dopo aver **vinto** la sua prima causa.

Poiché, dopo gli studi, lo studente non si decideva a praticare l'avvocatura e quindi non lo pagava, Protagora lo citò in giudizio.

Lo studente, che non poteva permettersi un avvocato, decise di difendersi da solo.

Il paradosso dell'avvocato

A. Protagora sosteneva che, se avesse vinto la causa, avrebbe dovuto essere pagato in base alla sentenza.

E se avesse perso, avrebbe dovuto essere pagato in base all'accordo.

Quindi, in ogni caso, doveva essere pagato!

B. Lo studente sosteneva che, se avesse vinto la causa, non avrebbe dovuto pagare in base alla sentenza.

E se avesse perso, non avrebbe dovuto pagare in base all'accordo.

Quindi, in ogni caso, **<u>non</u>** doveva pagare!

Conclusione paradossale

Non ho niente da dire,
e lo sto dicendo!

John Cage

Connettivi tri-, .. , n- argomentali

- BASTA, non se ne può più !
- Ma come descrivere situazioni **più complesse** in cui non sia intuitivo l'uso dei connettivi studiati?
- Sono sufficienti opportune combinazioni di ***not*** ***and*** ***or*** per esprimere un qualsiasi connettivo!
- Es.

A	>	B		A	and	not	B
V	F	V		V	F	F	V
V	V	F		V	V	V	F
F	F	V		F	F	F	V
F	F	F		F	F	V	F

Forme disgiuntive normali

- Utilizzano solo ***<u>not</u>*** ***<u>and</u>*** ***<u>or</u>*** per descrivere risultati dipendenti da valori di verità di proposizioni semplici
- Ci si riferisce alla **tavola di verità** in cui appaiono tutte le possibili assegnazioni di verità delle proposizioni semplici
- Si considerano le **combinazioni** per le quali si ottiene valore di verità V
- Per ogni tale combinazione le proposizioni con valore di **verità F** si fanno precedere da ***<u>not</u>***
- Le proposizioni così modificate vengono fra loro connesse con ***<u>and</u>*** (si creano congiunzioni)
- Tali congiunzioni vengono fra loro connesse con ***<u>or</u>*** , formando una forma disgiuntiva normale

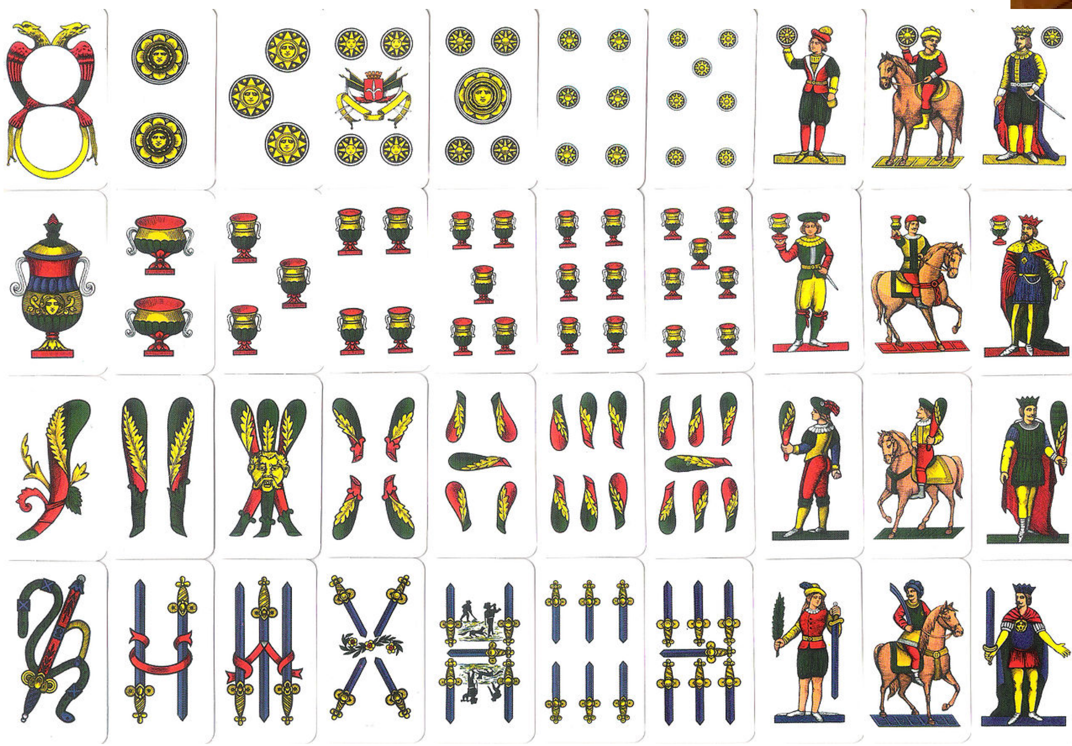
Forme disgiuntive normali

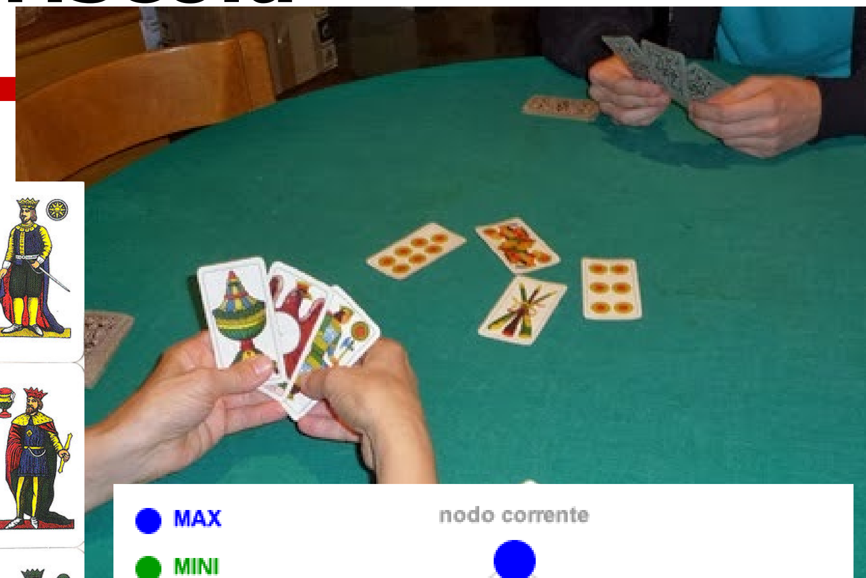
- Es. A=B

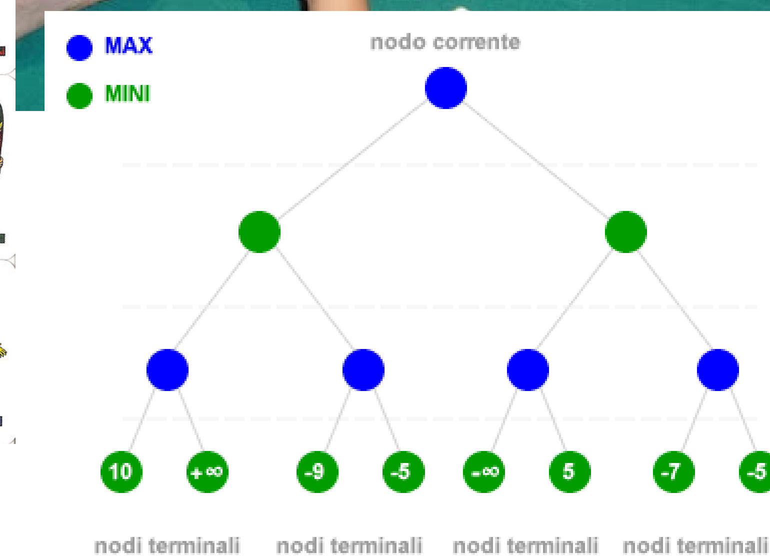
A	B		=		
V	V		V	*	A and B
V	F		F		
F	V		F		
F	F		V	*	not A and not B

- Risultato: (A and B) or (not A and not B)

Insegniamo ad un computer a giocare a briscola







Forme disgiuntive normali

- **Esercizio**: condizione di presa nel **Gioco della Briscola** per il giocatore che tira per primo (**G1**)

- Proposizioni che definiscono la condizione:

  - i semi sono uguali (**SU**)
  - il secondo giocatore ha tirato una briscola (**B2**)
  - il valore della carta del I giocatore è maggiore del valore della carta del II giocatore (**M1**)

Forme disgiuntive normali

- Condizione di presa nella briscola per il primo giocatore (elenchiamo le varie combinazioni)

SU	B2	M1		G1
V	V	V		V
V	V	F		F
V	F	V		V
V	F	F		F
F	V	V		F
F	V	F		F
F	F	V		V
F	F	F		V

- **G1 = (SU and B2 and M1) or (SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and not M1)**